数理解析研究所講究録
59巻 1968年 249-262

楕円型微分作用素の一般境界値問題

東大理　井上 淳

§1. 序

1952年，I.M. Visik がその論文 "On general boundary value problems for elliptic differential operators" において考察したことを高階強楕円型微分作用素の場合に拡張し，その考えを用いて，いわゆる non-local boundary value problem を考えてみる。（Visik は，上記の論文において 2階実変数係数の場合について述べ，その序文において，高階の場合も同様の考察がなされるだろうと記している。） Visik の基本的な考えは以下の様である。
Hを，可分なHilbert 空間とし，T_0, T_0' を Hにおける，稠密な定義域をもった閉作用素で，互いに共役だとする。即ち，$f_0 \in D(T_0)$, $g_0 \in D(T_0')$ に対し，$(T_0 f_0, g_0) = (f_0, T_0' g_0)$ が成立する。このとき，T_0' の共役作用素 $(T_0')^*$ を T_1，T_0 のそれを $T_1' = (T_0)^*$ と定めると，$T_0 \subset T_1$, $T_0' \subset T_1'$ は明らか。

ここで，T_0及びT_0'が有界な逆をもつことを仮定すると，$T_0 \subset \tilde{A} \subset T_1$なる閉作用素$\tilde{A}$で，$R(\tilde{A})=H$かつ$\tilde{A}^{-1}$をもつような$\tilde{A}$が少なくとも１つ存在する。（以後，このような$\tilde{A}$を，solvable realizationと呼ぶ）。Solvable realization $\tilde{A}$を１つとると，$D(T_1)=D(T_0)+\tilde{A}^{-1}N(T_1')+N(T_1)$と一次独立な和に分解できる。ここで，$R(\#)$, $N(\#)$はそれぞれ，作用素#の値域及び零空間を表わす。又，$T_0 \subset A \subset T_1$なる閉作用素$A$がsolvableなる為の必要十分条件は，$N(T_1)$から$N(T_1)$への有界作用素$C$が存在して，$D(A)=D(T_0)+(\tilde{A}^{-1}+C)N(T_1')$と分解できることである。Visikのideaは，この分解を微分作用素の場合に適用することである。

ΩをR^nにおける滑らかな境界$\partial\Omega$をもつ有界領域とする。$L=\sum_{|\alpha|\le m,\, |\beta|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}a_{\alpha\beta}(x)D^{\beta}$を$\Omega$における一様強楕円型微分作用素で，係数$a_{\alpha\beta}(x)$は$\bar{\Omega}$で$C^{\infty}$とする。上の理論を用いる為に，$L$からinduceされる$L^2(\Omega)$におけるDirichlet作用素がsolvableと仮定する。即ち，$D(\tilde{A})=\mathcal{E}^{m}_{L^2}(\Omega) \cap \mathcal{E}^{2m}_{L^2}(\Omega)$，$\tilde{A}\tilde{f}=L\tilde{f}$ for $\tilde{f} \in D(\tilde{A})$とDirichlet作用素$\tilde{A}$を定めると，$\tilde{A}$は$D(\tilde{A})$から$L^2(\Omega)$へのbijectionとなる。まず$N(T_1')$の性質を調べ，次に適当な境界作用素を導入して，$D(A)$（$A$は任意のsolvable realization）の元に適用してboundary conditionを導く。ここで，適当な境界作用素とは，Lが２階の場合は，$\gamma_1 f=f|_{\partial\Omega}$ for $f \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$

及び，$\gamma_2 f = \frac{\partial}{\partial\nu} f - P\gamma_1 f$ for $f \in C^\infty(\bar\Omega)$ なる作用素 γ_1, γ_2 を $D(T_1)$ に拡張したものである。ここで，$P\gamma_1 f = \frac{\partial}{\partial\nu} u$，$u$ は $Lu = 0$, $\gamma_1 u = \gamma_1 f$ なる解，ν は inner conormal を表わす。(T_0 は $L^2(\Omega)$ における L の minimal operator，T_1 は maximal operator になる。)

最後に，上で調べた $N(T_1)$ の性質を用いて 以下の non-local boundary problem を証明する。$L = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$ を Ω における一様強楕円型微分作用素とし，solvable Dirichlet realization をもつとする。B を $L^2(\partial\Omega)$ での有界作用素とし，作用素 L_B を次の様に定める。

$$\begin{cases} D(L_B) = \{ f \in D(T_1)\ ;\ \tau f \in L^2(\partial\Omega),\ N f \in L^2(\partial\Omega)\ \text{s.t.}\ Nf = B\tau f \} \\ L_B f = Lf \qquad \text{for } f \in D(L_B) \end{cases}$$

ここで，τ, N は，$\tau f = f|_{\partial\Omega}$, $Nf = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \cos(n, x_i)\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial\nu} f$ for $f \in C^\infty(\bar\Omega)$ の $D(T_1)$ への適当な拡張である。n は内法線。このとき，$a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ が real とすると，L_B は $L^2(\Omega)$ において閉作用素をなし，その spectrum $\sigma(L_B)$ は，右に開いた parabolic-like region に含まれることが分る。この事実は既に R. Beals [1] によって証明され，ここでもその方針に従って示す。L が solvable Dirichlet realization をもつという仮定によって，$D(T_1)$ の分解が使えるので，証明は分かり易いであろう。

§2. 作用素の拡張理論

この節は Visik [1] による。

H を可分な Hilbert 空間，T_0, T_0' を H における稠密な定義域をもった閉作用素で，互いに形式的共役だとする。T_0, T_0' はそれぞれ有界な逆をもつとする。即ち，定数 K が存在して任意の $f_0 \in D(T_0)$ に対して，$\|T_0 f_0\| \geq K\|f_0\|$ 又，任意の $g_0 \in D(T_0')$ に対して，$\|T_0' g_0\| \geq K\|g_0\|$ が成立する。T_0' の共役作用素 $T_0'^{*}$ を T_1，T_0 のそれを T_1' と定義する。

補題 1．$R(T_1) = H$，$R(T_1') = H$

定理 1　次の性質をみたす線型作用素 A，$T_0 \subset A \subset T_1$，が少なくとも 1 つ存在する。

1) $R(A) = H$

2) A は有界な逆をもつ．

上の定理 1 より，次の定理はすぐに導かれる。

定理 2．T_1 の定義域 $D(T_1)$ は以下の様に分解される。

(2.1)　$D(T_1) = D(T_0) \dotplus A^{-1}N(T_1') \dotplus N(T_1)$　（直和）

ここで，A は定理 1 で存在を保証された 1 つの作用素である。

補題 2．上の分解 (2.1) は次の意味で連続である。$\{f_n\}$ $n=1,2,\cdots$，を $D(T_1)$ の元とし，$f_n = f_{0n} + A^{-1}v_n + u_n$，$f_{0n} \in D(T_0)$ $v_n \in N(T_1')$，$u_n \in N(T_1)$ と分解しておく。f_n が f_0 にグラフ位相で収束しているとする．f_0 は $D(T_1)$ に属するから，

$f_0 = f_{00} + A^{-1}v_0 + u_0$, $f_{00} \in D(T_0)$, $v_0 \in N(T_1')$, $u_0 \in N(T_1)$ と分解できる。このとき、f_{0n}, v_n, u_n はそれぞれ、f_{00}, v_0, u_0 に収束する。

（証明）まず、$R(T_0) \oplus N(T_1') = H$ を注意する。$T_1 f_n = T_1 f_{0n} \oplus v_n = T_0 f_{0n} \oplus v_n$ が $T_1 f_0 = T_0 f_{00} \oplus v_0$ に収束しているのだから $T_0 f_{0n}$ は $T_0 f_{00}$ に、v_n は v_0 に収束している。T_0は有界な逆をもつから、f_{0n} は f_{00} に収束している。f_n は f_0 に収束しているのだから、u_n は u_0 に収束していることが分かる。（A^{-1} が連続なることに注意）　（終）

次に、可解性の定義をしよう。

定義 1. 閉作用素 A は条件(N) を満足するとき、正規的可解といわれる。(N): hが与えられたとき、$Af=h$ を満足する $f \in D(A)$ が存在する為の必要十分条件は、hが $N(A^*)$ に直交することである。

A が正規的可解なる為の必要十分条件は、$R(A)$ が閉なることである。又、A が正規的可解ならば、A^* も正規的可解である。

定義 2. 閉作用素 A は、次の条件(R) をみたすとき、正則的可解といわれる。(R): A が正規的可解で、$\dim N(A) = \dim N(A^*) < \infty$

定義 3 閉作用素 A が（完全）可解であるとは、$R(A)=H$ で（完全）連続な逆をもつことである。

定理3　作用素A，$T_0 \subset A \subset T_1$，が可解なる為の必要十分条件は，$D(A)=D(T_0)\dotplus(\tilde{A}^{-1}+C)N(T_1')$ と直和分解されることである。ここで，$\tilde{A}$ は定理1で存在を保証された1つの作用素，C は $N(T_1')$ から $N(T_1)$ への連続作用素．もっと一般には，A が正規的可解なる為の必要十分条件は，その定義域 $D(A)$ が $D(A)=D(T_0)\dotplus(\tilde{A}^{-1}+C)V+U^{\perp}$ と分解され，V は $N(T_1')$ の閉部分空間，$U^{\perp}$ は $N(T_1)$ の閉部分空間，C は $D(C)=V$ から $R(C)\subset N(T_1)$ への連続作用素である。

§3．最小作用素と最大作用素

$L=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$ を m 階の微分作用素で，$\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω で定義されているとする。ここで，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ α_i：整数，$|\alpha|=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$，$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$，$D_j=\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_j}$．L の形式的共役作用素を L' とする。$L'=\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(\overline{a_\alpha(x)}\cdot)$．$a_\alpha(x)\in C^\infty(\Omega)$ を仮定しておく．作用素 T_{00}, T_{00}' をそれぞれ，$D(T_{00})=C_0^\infty(\Omega)$，$T_{00}u=Lu$ for $u\in D(T_{00})$，$D(T_{00}')=\mathcal{D}(\Omega)$，$T_{00}'v=L'v$ for $v\in D(T_{00}')$ と定める。この T_{00}, T_{00}' が $L^2(\Omega)$ の中で closable なことは良く知られている。T_0 を T_{00} の $L^2(\Omega)$ での閉包とし，最小作用素という。T_0' も同様．このとき，$(T_0f_0, g_0)=(f_0, T_0'g_0)$ for $f_0\in D(T_0)$ $g_0\in D(T_0')$ が成立することは明らか．T_1 を T_0' の $L^2(\Omega)$ での共役作用素とし，最大作用素という。即ち，$T_1=(T_0')^*$．同様に，

$T_1' = T_0^*$ と定める。このとき

定理1 Ωを 滑らかでcompactな境界$\partial\Omega$でかこまれた領域とする。Lを$2m$階一様強楕円型微分作用素、T_1をその$L^2(\Omega)$における最大作用素とする。$T_2 = T_1|_{C^\infty(\bar\Omega)}$と定めると、$T_2$の$L^2(\Omega)$での閉包は$T_1$である。但し、$L$の係数は滑らかとする。

定理2. LとΩを定理1と同じとする。このとき、

$$\begin{cases} D(T_0) = \mathcal{D}^{2m}_{L^2}(\Omega) \\ D(T_1) = \{ f \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{E}^{2m}_{L^2_{loc}}(\Omega) \ ; \ Lf \in L^2(\Omega) \} \end{cases}$$

§4. 最大作用素の零空間

まず、良く知られた事実を記しておく。

補題1. $\partial\Omega$を十分滑らかとし、Ωを境界として$\partial\Omega$をもつ領域とする。$C_0^\infty(\bar\Omega)$は$\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, $m=0,1,2,\cdots$ の中で稠密である。

補題2. mを正整数とする。nを内法線とし、$f \in C^\infty(\bar\Omega)$に対し、$\gamma f = (\gamma_0 f, \cdots, \gamma_{m-1} f)$, $\gamma_j f = \gamma_0 \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j f$, $\gamma_0 f = f|_{\partial\Omega}$ と定める。γは$\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$から$\prod_{j=0}^{m-1} \mathcal{E}^{m-j-\frac{1}{2}}_{L^2}(\partial\Omega)$への連続写像として拡張される。かつ、(i) γはsurjective, (ii) kernel of $\gamma = \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$

この補題2からただちに、$\prod_{j=0}^{m-1} \mathcal{E}^{m-j-\frac{1}{2}}_{L^2}(\partial\Omega)$から$\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega) \ominus \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$（$\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$の$\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$での直交補空間）への写像亜がinduceされる。この写像亜は、$\varphi \in \prod \mathcal{E}^{m-j-\frac{1}{2}}_{L^2}(\partial\Omega)$に対し、次の方程式の解$w$を

対応させるものである。即ち，$\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}w=0$ with $\gamma w=\varphi$.

第2節において考察したように，$N(T_1)$を調べることが重要である．以後，Ω を $\mathbb{R}^n$ の領域で，滑らかで compact な境界$\partial\Omega$ でかこまれているとする。$L=\sum_{|\alpha|\le m,|\beta|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha a_{\alpha\beta}(x)D^\beta$

$a_{\alpha\beta}(x)\in C^\infty(\bar\Omega)$ とし，一様強楕円型とする．即ち，正定数δ_0が存在して，$\mathrm{Re}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta}\ge\delta_0|\xi|^{2m}$ for $x\in\bar\Omega$, $0\ne\xi\in\mathbb{R}^n$.

Lの形式的共役を $L'=\sum_{|\alpha|\le m,|\beta|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\overline{a_{\beta\alpha}(x)}D^\beta$ とする。

補題3　任意の $f,g\in C^\infty(\bar\Omega)$ に対して Green formula

(G.F.)　$(Lf,g)-(f,L'g)=\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega}\{N_jf\,\overline{\gamma_jg}-\gamma_jf\,\overline{M_jg}\}ds$

ここで，$N_j=b_j\gamma_{2m-j-1}+\sum_{k=2}^{2m-j}N_j^k\gamma_{2m-j-k}$．$b_j$ と $b_j^{-1}\in C^\infty(\partial\Omega)$，$N_j^k$ は $\partial\Omega$ に tangential な$(k-1)$階以下の微分作用素．M_jも同様．

以後，序で定めた Dirichlet operator $\tilde A$ が solvable in $L^2(\Omega)$ とする。

補題4．$\tilde A^*=\tilde A'$，$\tilde A'$はL'から定められた Dirichlet op.

補題5．微分作用素 Lは $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ から $\mathcal{D}^{-m}_{L^2}(\Omega)$ への連続，ontoの同型写像を与える。

定理1．任意の $\varphi=(\varphi_0,\cdots,\varphi_{m-1})\in\prod\mathcal{E}^{m-j-\frac12}_{L^2}(\partial\Omega)$ に対して，$u=(I-GL)\Phi\varphi$ は，$Lu=0$, $\gamma u=\varphi$ の $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ における解を与える．

定理2．$C^\infty(\bar\Omega)\cap N(T_1)$ は $N(T_1)$ の中で，$L^2(\Omega)$ ノルムで稠密である．

定理3. $N(T_1)$ から $\prod_{j=0}^{m-1}\mathcal{E}_{L^2}^{-(j+\frac{1}{2})}(\partial\Omega)$ への連続, onto な同型写像 τ が存在する。τ は $C^\infty(\bar\Omega)\cap N(T_1)\ni\tilde{u}$ に対しては $\tau\tilde{u}=\gamma\tilde{u}$.

§5. 基本的境界作用素.

空間 $H_1=\prod_{j=0}^{m-1}C^\infty(\partial\Omega)$ の中に, 次の様に内積を導入し, その完備化を $\mathcal{H}_1$ と記す。任意の $\varphi,\psi\in H_1$ に対し,

$$\{\varphi,\psi\}_1=((I-GL)\Phi\varphi,(I-GL)\Phi\psi)$$

と定める。これが well-defined なることは前節定理1による. 特に, $\tilde{u}\in C^\infty(\bar\Omega)\cap N(T_1)$ に対して, $\tilde{u}=(I-GL)\Phi\gamma\tilde{u}$ に注意. 故に, 任意の $u\in N(T_1)$ に対し, $\gamma_1 u$ を $\gamma_1 u_n=\gamma u_n$, $u_n\in C^\infty(\bar\Omega)\cap N(T_1)$ の極限として定めることによって, $\{\gamma_1 u,\gamma_1 u\}_1=(u,u)$ が従う。

命題1. γ_1 は $N(T_1)$ から $\mathcal{H}_1$ への isometric, onto 作用素.

命題2. $\gamma=\gamma_1$ on $\mathcal{E}_{L^2}^{m}(\Omega)\cap D(T_1)$

定理1. $\mathcal{H}_1$ は $\prod_{j=0}^{m-1}\mathcal{E}_{L^2}^{-(j+\frac{1}{2})}(\partial\Omega)$ と同一視できる.

次に, 作用素 $\mathbb{P}$ を以下の様に定める. 任意の $\varphi=(\varphi_0,\cdots,\varphi_{m-1})\in\prod_{j=0}^{m-1}C^\infty(\partial\Omega)$ に対し, $\mathbb{P}\varphi=\mathbb{N}u$, ここで $u=(I-GL)\Phi\varphi$, $\mathbb{N}=(N_0,\cdots,N_{m-1})$, N_j は前節補題3で定義されたもの. そして任意の $f\in C^\infty(\bar\Omega)$ に対して, $\gamma_2 f=\mathbb{N}f-\mathbb{P}\gamma_1 f$ と定義する. ?. $\gamma_2 f_0=0$ for $f_0\in D(T_0)=\mathcal{D}_{L^2}^{2m}(\Omega)$, $\gamma_2 u=0$ for $u\in N(T_1)$ と定める。これらが natural なることは明らか。次に, $G\tilde{v}$,

$\tilde{v} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap N(T_1')$ に対して考える。まず,

命題 3. $\tilde{v}, \tilde{v}' \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap N(T_1')$ に対して,

$$(\tilde{v}, \tilde{v}') = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} N_j G \tilde{v} \cdot \overline{\gamma_j \tilde{v}'} \, ds$$

空間 $\mathbb{H}_2 = \{\gamma_2 G \tilde{v},\ \tilde{v} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap N(T_1')\}$ に次の様に内積を入れその完備化を $\mathcal{H}_2$ と記す。$\{\gamma_2 G \tilde{v}, \gamma_2 G \tilde{v}'\}_2 = (\tilde{v}, \tilde{v}')$. このとき, $\gamma_2 G \tilde{v} = \mathbb{N} G \tilde{v}$ に注意せよ。任意の $v \in N(T_1')$ に対して, $v_n \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap N(T_1')$ s.t. $v_n \Rightarrow v$ を考え, $\gamma_2 G v_n$ の $\mathcal{H}_2$ での極限を $\gamma_2 G v$ と記す。$\{\gamma_2 G v, \gamma_2 G v'\}_2 = (v, v')$

命題 4. 作用素 $\gamma_2 G$ は $N(T_1')$ を $\mathcal{H}_2$ へ isometric, onto に対応させる。

命題 5. γ_2 は $D(T_1)$ から $\mathcal{H}_2$ への連続写像, $D(T_1)$ にはグラフ位相を入れておく.

定理 2. 空間 $\mathcal{H}_2$ と $\prod_{j=0}^{m-1} \mathcal{E}_{L^2}^{j+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ は同一視できる。

定理 3. 空間 $\mathcal{H}_2$ と $\mathcal{H}_1'$, $\mathcal{H}_2'$ と $\mathcal{H}_1$ は互いに dual. duality は, $\langle \gamma_2 G v, \overline{\gamma_1 v'} \rangle = (v, v')$ for $v, v' \in N(T_1')$, $\langle \gamma_1 u, \overline{\gamma_2 G u'} \rangle = (u, u')$ for $u, u' \in N(T_1)$ で与えられる。ここで第 1 式の $\langle , \rangle$ は $\prod \mathcal{E}_{L^2}^{j+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ と $\prod \mathcal{E}_{L^2}^{-(j+\frac{1}{2})}(\partial\Omega)$, 第 2 式の $\langle , \rangle$ は $\prod \mathcal{E}_{L^2}^{-(j+\frac{1}{2})}(\partial\Omega)$ と $\prod \mathcal{E}_{L^2}^{j+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ の duality.

§6. 同次境界条件の一般形

前節の境界作用素 γ_1, γ_2 を第 2 節の定理 3 に適用して,

定理 境界条件が $\gamma_1 f = \mathbb{C}\gamma_2 f$ の形であるとき，対応する作用素 $A_{\mathbb{C}}$ は solvable である。$D(A_{\mathbb{C}}) = \{f \in D(T_1)\ ;\ \gamma_1 f = \mathbb{C}\gamma_2 f\}$
$\mathbb{C}$ は $\mathcal{H}_2$ から $\mathcal{H}_1$ への有界作用素．逆に，$T_0 \subset A \subset T_1$ なる作用素 A が solvable ならば，$\mathcal{H}_2$ から $\mathcal{H}_1$ への有界作用素 $\mathbb{C}_A$ が存在して，$D(A)$ の元は，$\gamma_1 f = \mathbb{C}_A \gamma_2 f$，$f \in D(A)$ を満足している。

§7. Non-local boundary value problem

Ω を前の通りとする．$L = -\sum \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$ とし，一様強楕円型，$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) = \overline{a_{ij}(x)} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ とする。$b_i(x), c(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ も仮定。B を $L^2(\partial\Omega)$ の有界作用素として次の様な作用素 A_B を考える．

$$
\begin{cases} D(A_B) = \{f \in D(T_1)\ :\ \tau f \in L^2(\partial\Omega),\ Nf \in L^2(\partial\Omega),\ Nf = B\tau f\} \\ L_B f = Lf \quad \text{for } f \in D(L_B) \end{cases}
$$

定理 L が solvable Dirichlet realization をもつとする。このとき L_B は閉作用素で，その spectrum $\sigma(L_B)$ は右に開いた parabolic-like な領域に含まれる。

この証明の為に $\mathfrak{T}$ operator を導入する．即ち．

$$
\begin{cases} D(\mathfrak{T}) = \{[f, \tau f] \mid f \in D(T_1),\ \tau f \in L^2(\partial\Omega),\ \&\ Nf \in L^2(\partial\Omega)\} \\ \mathfrak{T}[f, \tau f] = [T_1 f, Nf] \end{cases}
$$

このとき

補題1 $\mathfrak{S}$は$L^2(\Omega)\times L^2(\partial\Omega)$の中で稠密な定義域をもった閉作用素である。

(証明) $D(\mathfrak{S})$の稠密性. $[g,\varphi]\in L^2(\Omega)\times L^2(\partial\Omega)$ を$D(\mathfrak{S})$に直交しているとする。即ち $(f,g)+(\tau f,\varphi)=0$ $f=f_0\in D(T_0)$とおいて, $(f_0,g)=0$. 故に$g=0$. 次に$f=\tilde{u}\in C^\infty(\bar{\Omega})\cap N(T_1)$とおいて$\varphi=0$を得る。

$\mathfrak{S}$の閉性. $[f_n,\tau f_n]$が$[f,\varphi]$に$L^2(\Omega)\times L^2(\partial\Omega)$で収束しているとする. かつ $[T_1 f_n, N f_n]\Rightarrow[g,\psi]$ in $L^2(\Omega)\times L^2(\partial\Omega)$. T_1の閉なることより, $f\in D(T_1)$, $T_1 f=g$ がただちに従う。τf_nがτfに$\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}_{L^2}(\partial\Omega)$の意味で収束することは知られているから, $\tau f=\varphi$. 同様にして, $Nf=\psi$. かつ $\mathfrak{S}[f,\varphi]=\mathfrak{S}[f,\tau f]=[T_1 f,Nf]=[g,\psi]$

Q.E.D.

補題2 $\mathfrak{S}'=\mathfrak{S}^*$. $\mathfrak{S}'$はL'に対応する作用素, $\mathfrak{S}^*$は$\mathfrak{S}$の$L^2(\Omega)\times L^2(\partial\Omega)$の中でのadjoint.

補題3 $f\in D(T_1)$, $\tau f\in L^2(\partial\Omega)$, $Nf\in L^2(\partial\Omega)\Rightarrow f\in\mathcal{E}^{\frac{3}{2}}_{L^2}(\Omega)$.

この補題の証明に, S_0の$L^2(\Omega)\times L^2(\partial\Omega)$での閉包が$\mathfrak{S}$に一致することを用いる. ここで, $D(S_0)=\{[\tilde{f},\tau\tilde{f}]\mid\tilde{f}\in C^\infty(\bar{\Omega})\}$, $S_0=\mathfrak{S}$ on $D(S_0)$.

補題4. もし, $0\in\rho(\mathfrak{S}-B_1-P(\lambda))$ ならば, 作用素L_Bは閉で$\lambda\in\rho(L_B)$. ここで, $B_1[f,\varphi]=[0,B\varphi]$, $P(\lambda)[f,\varphi]=[\lambda f,0]$ for $[f,\varphi]\in L^2(\Omega)\times L^2(\partial\Omega)$

補題5 正定数 δ_0 が存在して

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j},\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \geqq \delta_0\|f\|_1^2 - \delta_0\|f\|_0^2 \quad \text{for } f\in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$$

補題6 任意の $\varepsilon>0$ に対して C_1 が存在して

$$\|f|_{\partial\Omega}\|^2_{0,\partial\Omega} \leqq \varepsilon\|f\|_1^2 + \frac{C_1}{\varepsilon}\|f\|_0^2 \quad \text{for } f\in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega).$$

この2つの補題より $0\in\rho(\hat{S}-B_1-P(\sigma))$ なる σ の存在を示す。結局 $\|(\hat{S}-B_1-P(\sigma))[f,\tau f]\| \geqq C_0\|[f,\tau f]\|$ なる不等式を得る。このような $\sigma\in\mathbb{R}$ の存在がわかる。又 $(\hat{S}-B_1-P(\sigma))^* = \hat{S}'-B_1^*-P(\sigma)$ なることが分かるから、同様の不等式が成立する。故に、$0\in\rho(\hat{S}-B_1-P(\sigma))$ が示される。

最後に、$\sigma(L_B)$ の位置が、次の不等式が成立する $\lambda\in\mathbb{C}$ の complement として示される。即ち $C=C(\lambda)>0$ が存在して

$$|((L_B-\lambda)f,f)| \geqq C\|f\|^2$$

以後の計算は R.Beals [1] と全く同じ。$D(f,f)=\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j},\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$
$R(f,f)=\sum\left(b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i},f\right)+(c(x)f,f)$ とする。$C_0=\max_{x\in\Omega}\{|b_i(x)|,|c(x)|\}$
とおけば、$|R(f,f)| \leq C_0\varepsilon\|f\|_1^2+\frac{C_0}{\varepsilon}\|f\|_0^2$

$$\begin{aligned}|((L_B-\lambda)f,f)| &= \left|D(f,f)+R(f,f)+\int_{\partial\Omega}Nf\,\overline{\tau f}\,dS-\lambda\|f\|_0^2\right| \\ &\geqq tD(f,f)+((1-t)|\tau|-\sigma t)\|f\|_0^2-|R(f,f)|-\|B\|\|\tau f\|^2_{0,\partial\Omega} \quad 0\leqq t\leq 1 \\ &\geqq (t\delta_0-(\|B\|+C_0)\varepsilon)\|f\|_1^2+\left((1-t)|\tau|-\sigma t-\delta_0 t-\frac{C_1}{\varepsilon}-\frac{\|B\|C_0}{\varepsilon}\right)\|f\|_0^2\end{aligned}$$

ここで $\lambda=\sigma+i\tau$ とおいた。$t\delta_0=(\|B\|+C_0)\varepsilon$ と ε をとり、

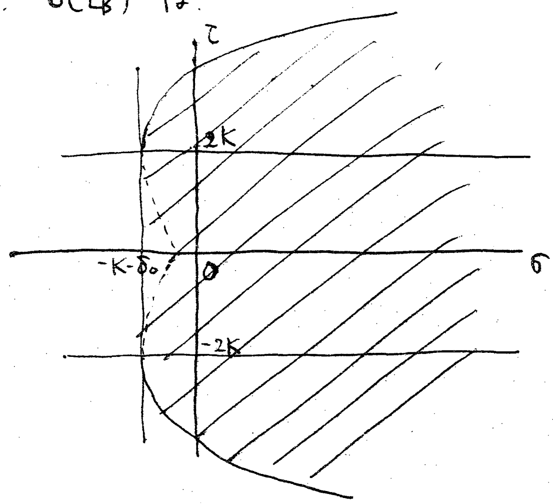
$$(1-t)|\tau|-(\sigma+\delta_0)t-\frac{(\|B\|+C_0)(\|B\|C_0+C_1)}{t\delta_0}>0 \quad \text{なる様にせよ。}$$

$K\equiv\delta_0^{-1}(\|B\|+C_0)(\|B\|C_0+C_1)$ とおくと、

$$\sigma+\delta_0<|\tau|(1-t)t^{-1}-Kt^{-2}=g(t)$$

$g(t)$ の最大値は $\frac{2K}{|\tau|}=t(\tau)$ でとられ, $g(t(\tau))=O(|\tau|^2K^{-1})$ $|\tau|\to\infty$

故に, $\sigma(L_\beta)$ は



なる parabolic-like region の中にある。

References

R. Beals [1] 'Non-local boundary value problems for elliptic operators' Amer. J. Math 87 (1965) 315-362

J. L. Lions et E. Magenes [1] 'Problèmes aux limites non homogènes IV' Scuola Norm Sup Pisa 15 (1961) 311-326

M. I. Visik [1] 'On general boundary value problems for elliptic partial differential equations' Amer. Math Soc Transl. (2) 24 107-172.